Τρίτη, 14 Νοεμβρίου 2017

ΘΕΩΡΗΜΑ FOSTER

Σε μια μη εργοδική Μ.Α., υπάρχει το διάνυσμα $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$ και ικανοποιεί την $\pi = \pi P$

Αν επιπλέον $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ είναι λύση της $x = xP$ με $\Sigma |x| < +\infty$, τότε $\pi = cx$, τ.ω. $\Sigma \pi_i = 1$

$\pi = \pi P$

1ος) Λαμβανοντας υποψιν οτι $\sum \pi = 1$

2ος) Βρισκω μια λυση $\sum |x_i| < +\infty$ και τω. $\pi = cx$ και $\sum \pi_i = 1$,

Αντιστροφα, για μια μη διαχωρισιμη Μ.Α είναι θετικώς επαν/κη οταν

$(\exists x)$ $x = xP$ με

(i) οχι όλα τα $x_i = 0$

(ii) $\sum |x_i| < +\infty$

<u>Ορισμος</u>

<u>Απεριοδική Μ.Α.</u> είναι μια Μ.Α. με περιοδο 1, οπου <u>περιοδος</u> της αλυσί-δας ορίζεται ο μεγιστος κοινος διαιρετης των περιοδων των καταστάσεων της

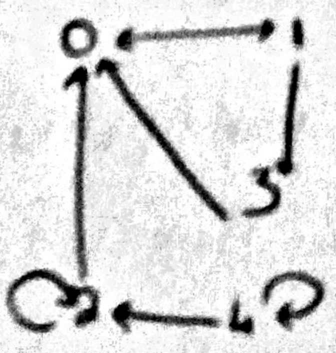
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

...ταν μια διαχωρίσιμη Μ.Α. είναι εργοδική, τότε εξηγήσαμε τους δι... τρόπους προσδιορισμού των οριακών πιθανοτήτων χρησιμοποιώντα... το ευθύ του θεωρήματος Foster. Σε περίπτωση που δεν ξέρω αν εί... εργοδική, χρησιμοποιώ το αντίθετο του θεωρήματος Foster για να εξετάσω πότε είναι εργοδική. Για εκείνες τις περιπτώσεις που είναι εργοδική, προσδιορίζω τις οριακές πιθανότητες με το ευθύ θεώρημα Fos...

Άσκηση 3.10.8

$\pi_2 = \pi_4 = 0$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$



• $2 \longrightarrow 0$ αλλά $0 \not\to 2 \Rightarrow$ η Μ.Α διασπάται

• Έστω 2 επαναληπτική καθώς και $2 \to 0$, θα έπρεπε $0 \to 2$
πράγμα το οποίο δε συμβαίνει, άρα 2 παροδική το οποίο ισχύει για την 4.

• Οι 0, 1, 3 συνθέτουν ένα κλειστό σύνολο επικοινωνίας των καταστάσεων με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων, άρα είναι θετικώς επαναληπτικές

Η περίοδος της 0 είναι:

$$\left.\begin{aligned} P_{00}^{(1)} &= 0 \\ P_{00}^{(2)} &= P(0 \to 1 \longrightarrow 0) > 0 \\ P_{00}^{(3)} &= P(0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 0) > 0 \\ &\mu\kappa\delta\{2, 3, \dots\} = 1 \end{aligned}\right\} \quad d_0 = d_1 = 1 = d_3$$

• Οι καταστάσεις 0, 1, 3 συνθέτουν για μια μη διασπ. Μ.Α. που ταυτόχρονα είναι εργοδική με πίνακα μετάβασης

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Από τον } P \\ \text{παίρνω αυτά} \\ \text{που θέλω} \end{array}\right)$$

• Οι καταστάσεις 0,1,3 συνθέτουν για μια μη διαδοχ. Μ.Α. που ταυτόχρονα είναι εργοδική με πίνακα μετάβασης

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Από τον P παίρνω αυτά που θέλω)

Το πρόβλημα εύρεσης των οριακών πιθανοτήτων ανάγεται στο ευθύ θεώρημα του Foster

$$(\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_3) = [\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\pi_0 = \pi_1 \, 1/4 + \pi_3$

$\pi_1 = \pi_0$

$\pi_3 = \pi_1 \frac{3}{4}$

και πρέπει

$\pi_1 + \pi_1 + \frac{3}{4}\pi_1 = 1$

$\pi_1 = \frac{4}{11}$

$\pi_0 = \frac{4}{11}$

$\pi_3 = \frac{3}{11}$

$$L_0 = \frac{1}{\pi_0} = \frac{11}{4}$$

$$L_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{11}{4}$$

$$L_3 = \frac{1}{\pi_3} = \frac{11}{3}$$

Άσκηση 3.109

$0 = \text{Μπ} \xrightarrow{2/3} \text{Ευρ}$, $\quad 0 = \text{Μπ} \xrightarrow{1/3} \text{Χαλ}$

$1 = \text{Ευρ} \xrightarrow{3/8} \text{Μπαχ}$, $\quad 1 = \text{Ευρ} \xrightarrow{1/2} \text{Ευρ}$, $\quad 1 = \text{Ευρ} \xrightarrow{1/8} \text{Χαλ}$

$2 = \text{Χαλ} \xrightarrow{1/2} \text{Μπαχ}$, $\quad 2 = \text{Χαλ} \xrightarrow{1/2} \text{Ευρ}$

• **Λύση**

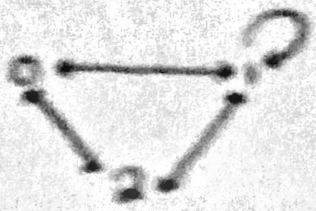
(i) Θεωρούμε X_n τη σ.δ. που περιγράφει το πότε κάνει διακοπές ο επιχειρηματίας το n-οστό καλοκαίρι. Είναι σ.δ. με διακριτό χώρο και διακριτό χρόνο καταστάσεων. Επιπλέον, ο χώρος των καταστάσεων έχει πεπερασμένο πλήθος. Επειδή το ~~[illegible]~~ μέλλον εξαρτάται μόνο από το παρόν και όχι από το παρελθόν, έχουμε τη Μ.Α.

Ιδιότητα

Οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος, δεν επηρεάζεται από τη χρονική στιγμή μετάβασης και επομένως ικανοποιείται η ιδιότητα της στασιμότητας

πίνακας μετάβασης ενός βήματος:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

δ) 

Πρόκειται για μη διαχωρίσιμη μ.α.

+

πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων

&

θετικώς επαναληπτικές

$P_{11}^{(1)} = 1/8 > 0$

ΜΚΔ = 1 $\Longrightarrow$ απεριοδικές

$$\begin{bmatrix} \pi_0 , \pi_1 , \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
\pi_0 &= \tfrac{3}{8}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2 \\
\pi_1 &= \tfrac{2}{3}\pi_0 + \tfrac{1}{8}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2 \\
\pi_2 &= \tfrac{1}{3}\pi_0 + \tfrac{1}{2}\pi_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}
\pi_2 &= \tfrac{3}{4}\pi_1 \\
\pi_0 &= \tfrac{3}{4}\pi_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ Ξέρω ότι } \pi_0+\pi_1+\pi_2 = 1 \Rightarrow \left.\begin{aligned}
\pi_1 &= \tfrac{4}{10} \\
\pi_2 &= \tfrac{3}{10} \\
\pi_0 &= \tfrac{3}{10}
\end{aligned}\right\}$$

(iii) $\mathcal{L}_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{10}{4} = 2.5$ βήματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.10.7 (σελ. 72)

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\
0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\
0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$5 \to 1$ αλλά $1 \not\to 5$, άρα διαχωρίσιμη Μ.Α.

5, 6 παροδικές

0, 1 κλειστό σύστημα

Επίσης οι καταστάσεις 2, 3, 4 αποτελούν κλειστό κύκλωμα επικοινωνίας καταστάσεων πεπερασμένου πλήθους

Η εύρεση των οριακών πιθανοτήτων των καταστάσεων 0 και ανάγετα
σε εφαρμογή του θεωρήματος του Foster καθώς η περίοδος είναι 1
πίνακα μετάβασης:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Ενώ η εύρεση των 2, 4, 3 ... με $P_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$

$$[\pi_0, \pi_1] = [\pi_0, \pi_1] P_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

$$[\pi_0, \pi_1] = \left[\frac{7}{15}, \frac{8}{15}\right]$$

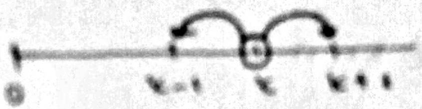
$$[\pi_2, \pi_3, \pi_4] = [\pi_2\ \pi_3\ \pi_4]\, P_2$$

$$\pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

$$[\pi_2, \pi_3, \pi_4] = \left[\frac{6}{23}, \frac{7}{23}, \frac{10}{23}\right]$$

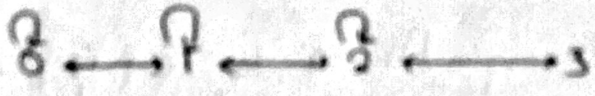
Πίνακας Μετάβασης Απλού Τυχαίου Περιπάτου Με Φράγμα Ανάκλασης στο 0

Η κίνηση του 0 περιγράφεται από το σχήμα



Η σ.δ. έχει τη μαρκοβιανή ιδιότητα και πίνακα μετάβασης:

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & \cdots \\ q & 1-p & p & \cdots \\ 0 & q & 1-p & \cdots \\ 0 & 0 & q & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}
$$



Θα χρησιμοποιήσω το αντίθετο του θεωρήματος του Foster για να δω πότε η περιοδική μη διαχ. Μ.Α. είναι επαναληπτική

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x} P \Rightarrow (x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_0\ x_1\ x_2\ \dots) P$$

$$x_0 = x_0(1-p) + x_1 q + \dots \Rightarrow x_0 p = x_1 q \Rightarrow x_1 = \frac{p}{q} x_0$$

$$\vdots$$

Άρα, $\underset{\sim}{x} = \left[x_0 , \left(\frac{p}{q}\right) x_0 , \left(\frac{p}{q}\right)^2 x_0 , \left(\frac{p}{q}\right)^3 x_0 , \dots \right]$

Αν $x_0 \neq 0$, τότε $\exists \underline{x}$ τ.ω. όχι όλα τα $x_i = 0$

Θέλω $\Sigma |x_i| < +\infty$

Είναι $\Sigma \left|x_0 \left(\frac{p}{q}\right)^i\right| = |x_0| \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^i$

Συγκλίνει αν $p < q$

Επομένως, αν $p<q$, $(\exists x)$ $x = xP$, όχι όλα τα $x_i = 0$ και $\Sigma |x_i| < +\infty$, άρα η μη διαχ. Μ.Α. είναι επαναληπτική.

Αν $p \geq q$, τότε η Μ.Α. δεν είναι θετικώς επαν/κή, άρα είναι ή παροδική ή ασθενώς επαναληπτική, οι οριακές πιθανότητες και στα δύο είναι ίσες με μηδέν. Επομένως, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις οριακές πιθανότητες όταν $p<q$. Για τον λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το ευθύ θεώρημα του Foster, καθώς όταν $p<q$, έχουμε μη διαχωρ. θετικώς επαν/κή και απεριοδική Μ.Α.

Το $x = \left[1, \frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)^2, \dots\right]$

Πρέπει $\sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i = \sum_{i=0}^{+\infty} c\left(\frac{p}{q}\right)^i = 1 \to c\,\Sigma\left(\frac{p}{q}\right)^i = 1 \to c = 1 - \frac{p}{q}$

$\pi_i = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^i$, $p<q$